УДК 330.46

Киселев В.В.[1]
Акопян Е.А.[2]
Ткаченко Р.М.[3]

УПРАВЛЕНИЕ РЕГИОНАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ НА ОСНОВЕ РЕЗУЛЬТАТОВ АНАЛИЗА ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Аннотация. Статья посвящена вопросу управления региональными системами путем исследования результатов анализа фазовых портретов математических моделей. В работе изучаются качественные оценки состояния системы, возможный ансамбль траекторий их развития, которые позволяют глубже понять ее свойства, определить ведущие связи и выбрать оптимальные управляющие воздействия.

Ключевые слова: управление, региональные системы, математическая модель, система дифференциальных уравнений, особые точки, фазовые траектории.

Kiselev V.V.
Akopyan E.A.
Tkachenko R.M.

MANAGEMENT OF REGIONAL SYSTEMS BASED ON THE RESULTS OF THE ANALYSIS OF PHASE PORTRAITS OF MATHEMATICAL MODELS OF DYNAMIC SYSTEMS

Abstract. The article is devoted to the question of management of regional systems by examining the results of the analysis of phase portraits of mathematical models. In the article we study the qualitative assessment of the system, the ensemble of possible trajectories of development, which allow a deeper understanding of its properties, to identify connections and to select optimal control actions.

Keywords: management, regional systems, mathematical model, system of differential equations, singular points, phase trajectories.

Причиной низкой результативности институтов управления региональными системами в ряде случаев является отсутствие теоретико-методологической базы, на основе которой может быть дана объективная оценка состояния и определены основные градиенты ее динамики. Возвращению государства на позиции регулирования и управления, призванному обеспечить устойчивое развитие территории, будет содействовать не только совершенствование нормативно-правовой базы. С теоретической и практической точек зрения важными могут быть результаты исследования социально-экономических процессов, полученные с помощью математических моделей. Качественные и

[1] *Киселев Виктор Васильевич*, доктор биологических наук, профессор, профессор кафедры экономики и антимонопольного регулирования, Северо-Кавказский институт-филиал РАНХиГС, г. Пятигорск, e-mail: vikkiselev@yandex.ru
Kiselyov Victor, Dr.Sci.Biol., professor, professor of department of economy and antimonopoly regulation, The North Caucasus institute – branch of RANEPA, Pyatigorsk, e-mail: vikkiselev@yandex.ru
[2] *Акопян Елена Александровна*, кандидат экономических наук, доцент, доцент кафедры экономики и антимонопольного регулирования, Северо-Кавказский институт-филиал РАНХиГС, г. Пятигорск, e-mail: artako@yandex.ru
Akopyan Elena, Candidate of Economic Sciences, associate professor, associate professor of economy and antimonopoly regulation The North Caucasus institute – branch of RANEPA, Pyatigorsk, e-mail: artako@yandex.ru
[3] *Ткаченко Роман Михайлович*, кандидат физико-математических наук, e-mail: rom71468957@yandex.ru
Tkachenko Roman, candidate of physical and mathematical sciences, e-mail: rom71468957@yandex.ru

количественные оценки состояния системы, возможный ансамбль траекторий развития позволяют глубже понять ее свойства, определить ведущие связи и механизмы эволюции, выбрать оптимальные управляющие воздействия. Известно немало примеров, когда с помощью математического инструментария находились наилучшие варианты планирования и управления в отдельных отраслях экономики и регионах, осуществлялась оценка воспроизводственного потенциала больших территорий [1, 3, 4 5, 6, 7], а также в междисциплинарных исследованиях, объясняющих различие в уровне социально-экономического развития различных регионов и отдельных стран в планетарном масштабе [2].

Не обходится без сценарного анализа на математических моделях и поиск путей выхода из экологических, экономических и иных кризисов не только отдельных регионов и стран, но и в общепланетарном масштабе.

При необычайно высоком разнообразии задач, связанных с прогнозированием и управлением состояния динамических систем, для них справедливы законы сохранения. Это обстоятельство позволяет реализовать единый подход к построению математических моделей объектов самой различной природы. С математической точки зрения исследуемые системы могут быть описаны n переменными состояния системы – фазовыми переменными $x_1(t)$, $x_2(t)$,…, $x_n(t)$, а моделью будет являться некоторая система, например дифференциальных уравнений. Геометрической интерпретацией решения такой системы уравнений является семейство ориентированных фазовых траекторий в фазовом пространстве.

Наряду с фазовыми траекториями, присущими системе и дающими ключ к пониманию изменения фазовых переменных, важными характеристиками динамической системы являются особые точки и их тип. Особые точки представляют в фазовом пространстве положения равновесия системы. С физической точки зрения особые точки есть точки покоя, допускающие устойчивые или неустойчивые положения равновесия. Для автономной динамической системы, задаваемой уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i = (x_1, x_2, ..x_n),\ i = 1,2,\ldots,n, \tag{1}$$

особые точки определяются, следовательно, системой уравнений

$$f_i(x_1, x_2, ..x_n) = 0,\ i = 1,2,\ldots,n, \tag{2}$$

При $n = 2$, когда фазовое пространство двумерно, динамическая система может иметь особые точки только следующих четырех типов: центр, узел, фокус, седло.

Динамика системы, состояние которой определяется двумя фазовыми переменными, может быть описана следующей математической моделью, состоящей их двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \varphi(\tilde{o}_1; \tilde{o}_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \psi(\tilde{o}_1; \tilde{o}_2) \end{cases} \tag{3}$$

Решение (3) для случая $\frac{dx_1}{dt} = 0$ и $\frac{dx_2}{dt} = 0$ позволяет найти точки положения равновесия системы (1), которые получили название особых точек. В этих точках объект, описываемый системой уравнений (1), находится в состоянии покоя:

$$\begin{cases} \varphi(\tilde{o}_1; \tilde{o}_2) = 0 \\ \psi(\tilde{o}_1; \tilde{o}_2) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Точки пересечения двух нуль-изоклин (4) являются особыми точками на фазовой плоскости (x_1; x_2). Информация о их наличии и типе, а также явный вид нуль-изоклин полностью характеризуют качественное поведение объекта и позволяют построить фазовый портрет эволюции автономной динамической системы (3).

Если односвязная область содержит осо-

бую точку x_c, то возможен лишь один из следующих случаев:

1) Траектория является замкнутой кривой, внутри которой лежит точка x_c; все остальные замкнутые траектории, если они существуют, расположены так, что точка x_c лежит внутри каждой из них.
2) траектория примыкает обоими концами к точке x_c, тогда и каждая другая замкнутая траектория, лежащая внутри первой, примыкает обоими концами к точке x_c;
3) каждый конец траектории представляет собой спираль, асимптотически приближающуюся к кривой первого или второго типа;
4) один конец траектории достигает границы области, а другой примыкает к точке x_c;
5) один конец траектории достигает границы области, а другой образует спираль, асимптотически приближающуюся к кривой первого или второго типа;
6) траектория проходит от одной точки на границе области до другой.

Пусть найдена особая точка

$$x_c = (x_{1c}; x_{2c}). \tag{5}$$

Пусть $(x_1 - x_{1c}; x_2 - x_{2c})$ – малая окрестность этой точки. Тогда, правые части системы обыкновенных дифференциальных уравнений (4) в окрестности $x_c = (x_{1c}; x_{2c})$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1; x_2) &= \varphi(x_{1c}; x_{2c}) + a(x_1 - x_{1c}) + b(x_2 - x_{2c}), \\ \psi(x_1; x_2) &= \psi(x_{1c}; x_{2c}) + c(x_1 - x_{1c}) + d(x_2 - x_{2c}), \end{aligned} \tag{6}$$

где коэффициенты a, b, c, d определяются как частные производные:

$$a = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right|_{x_c}, \quad b = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right|_{x_c}, \quad c = \left.\frac{\partial \psi}{\partial x_1}\right|_{x_c}, \quad d = \left.\frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right|_{x_c} \tag{7}$$

Для особой точки $x = x_c$ значения $\varphi(x_{1c}; x_{2c})$ и $\psi(x_{1c}; x_{2c})$ в (6) обращаются в нуль и система (3) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= au_1 + bu_2, \\ \frac{du_2}{dt} &= cu_1 + du_2, \end{aligned} \tag{8}$$

где $u_1 = x_1 - x_{1c}$, $u_2 = x_2 - x_{2c}$.

Так как система уравнений (6) является линейной, то её решение определяется через функции

$$e = e_0 e^{\lambda t}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad u_0 = \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

Где e_{0i}, i = 1,2 и λ – const, значение которых необходимо определить. Подставив функции (9) в систему (8) получим

$$\begin{aligned} \lambda u_{01} &= a u_{01} + b u_{02}, \\ \lambda u_{02} &= c u_{01} + d u_{02}. \end{aligned} \tag{10}$$

Для того чтобы система двух линейных однородных уравнений имела решение необходимо выполнение условия разрешимости – определитель характеристического уравнения должен обращаться в ноль:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \lambda^2 + C\lambda + D = 0, \tag{11}$$

где $C = -(a + d)$, $D = ad - bc$.

В данном уравнении числа λ являются собственными значениями матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – характеристическими показателями.

Квадратное уравнение (11) имеет два корня. Если они не совпадают $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то решение записывается ив виде

$$x - x_c = u_0^{(1)} e^{\lambda_1 t} + u_0^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \quad (12)$$

где $\dot{e}_0^{(1)}$ и $\dot{e}_0^{(2)}$ – независимые собственные вектора матрицы А, отвечающие собственным значениям λ_1 и λ_2 соответственно, $\dot{e}_0^{(i)} = \lambda_i \dot{e}_0^{(i)}$, i = 1,2.

Значения корней характеристического уравнения (11) определяют типы особых точек. Решая это уравнение получим

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} - D}. \quad (13)$$

В зависимости от значений коэффициентов С и D возможны следующие случаи:

1. Если $\frac{c^2}{4} > D$. Тогда оба корня уравнения вещественные числа одного знака. При С > 0 корни отрицательны. Значит, для уравнения (12) x(t) → x_c при любых начальных условиях. Переходя к траектория получим – всякая фазовая траектория, имеющая своим началом некоторую окрестность особой точки, непременно приближается к этой точке (рис. 1). При существенном увеличении времени это приближение является монотонным. Такая особая точка носит название – устойчивый узел. При С < 0 всякая фазовая траектория, имеющая своим началом некоторую окрестность особой точки, непременно удаляется от нее. Соответствующая особая точка есть неустойчивый узел.

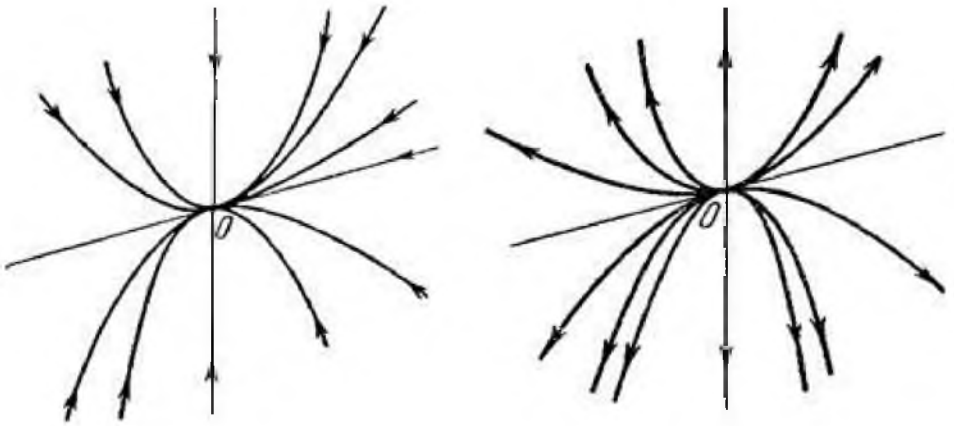


Рисунок 1 – ***Устойчивый и неустойчивый узел***

2. Если $D > 0, \frac{c^2}{4} < D$. Этому случаю соответствуют комплексно сопряженные корни характеристического уравнения. Решение уравнения (10) записывается в виде:

$$x - x_c = e^{(-c/2)t} \left(u_0^{(1)} \cos \omega t + u_0^{(2)} \sin \omega t \right), \quad (14)$$

где $\omega = \sqrt{D - c^2/4}$. При С > 0 фазовые траектории в колебательном режиме неограниченно приближаются к особой точке – имеет место асимптотическая устойчивость (рис. 2). Особая точка называется – устойчивый фокус. Если же С > 0, то спирали раскручиваются от особой точки и говорят, что имеет место неустойчивый фокус.

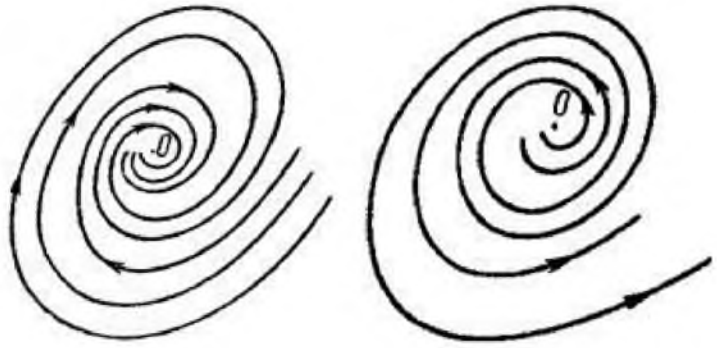


Рисунок 2 – *Устойчивый и неустойчивый фокус*

3. Если C = 0, D > 0. В этом случае оба корня чисто мнимы и комплексно сопряжены. Решение записывается в виде:

$$x - x_c = u_0^{(1)} \cos\omega t + u_0^{(2)} \sin\omega t \qquad (15)$$

где $\omega = \sqrt{D}$. Уравнение (15) описывает периодический колебательный процесс, фазовые траектории которого замкнуты, положение равновесия устойчиво, но не асимптотически. Особая точка такого процесса есть центр (рис. 3).

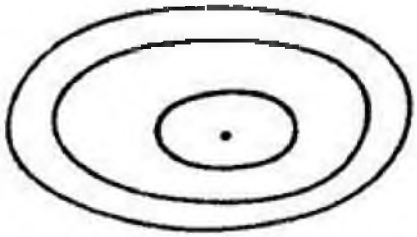


Рисунок 3 – *Особая точка – центр*

4. Если D < 0. Это означает, что при любых значениях C характеристические корни λ_1 и λ_2 вещественные и противоположного знака. Решение уравнения (12) имеет два слагаемых, одно из которых есть возрастающая экспонента, а второе – убывающая экспонента. В этом случае одна из траекторий всегда будет неограниченно возрастать, а другая неограниченно уменьшаться. Таким образом, седло всегда неустойчиво. Соответствующая этому случаю особая точка есть седловая точка (рис. 4).

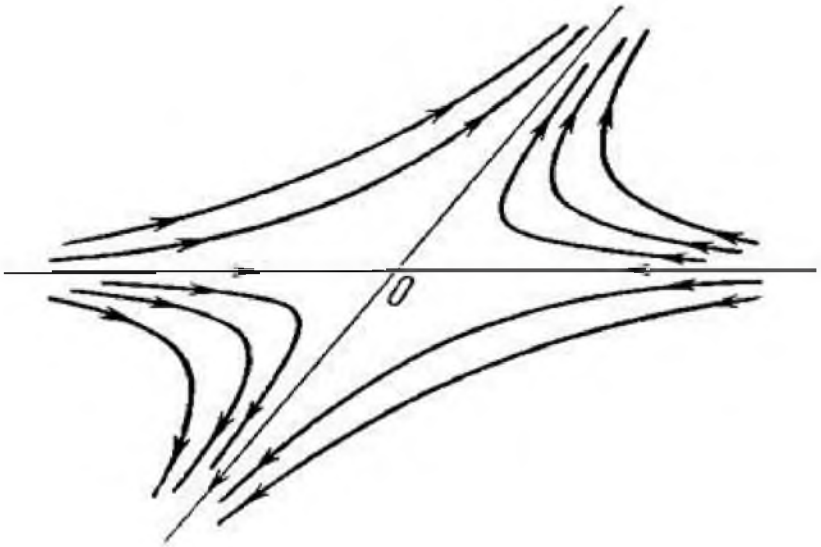


Рисунок 4 – *Фазовые траектории – седло*

Отобразим рассмотренную классификацию особых точек на плоскости (C, D) в виде рисунка:



Рисунок 5 – ***Схема распределения особых точек на плоскости параметров (C, D). Полуось C = 0, D > 0 соответствует особым точкам типа центра***

Изменение параметров рассматриваемых систем приводи к трансформации особых точек. Изучение их траектории позволяет сделать вывод о свойствах системы. Разбиение плоскости (C, D) параболой $D=\frac{c^2}{4}$ и прямыми D = 0 и C = 0 на области, соответствующие различным типам особых точек, определяет поведение изучаемой системы при изменении экзогенных переменных. Полуось C = 0, D > 0 соответствует особым точкам типа центр. Эта точка является точкой перехода системы от устойчивого фокуса к устойчивому. Таким образом, при изменении C происходит смена типа особой точки фокуса через образование центра, что легко понять, если вспомнить фазовые портреты этих особых точек. Анализ особой точки седла показал, что они неустойчивы при любых знаках C. Смена знака C приводит к повороту фазового портрета, то есть происходит переориентация.

В случае фазового пространства большей размерности число типов особых точек возрастает. При этом следует иметь в виду, что в n-мерном фазовом пространстве при $n > 2$ особые точки сочетают в себе свойства перечисленных выше особых точек двумерного фазового пространства. Поясним суть дела, рассмотрев в качестве примера систему с трехмерным фазовым пространством ($n = 3$ в уравнениях (1) и (2)).

Пусть $x_c = (x_{c1}, x_{c2}, x_{c3})$ – особая точка. Для определения типа этой особой точки выполним линеаризацию (1) в ее окрестности. Положим

$$u = x - x_c \tag{16}$$

Полученный вектор $u = (u_1,u_2,u_3)$ является малым. Это позволяет записать (1) в матричном виде

$$\frac{du}{dt} = Au \tag{17}$$

где A – матрица частных производных,

$$A = \left.\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}\right|_{x=x_c} \tag{18}$$

Решение уравнения (17) будем искать в виде

$$u = u_0 e^{\alpha t}. \tag{19}$$

Подстановка решения (19) в систему (17) приводит к системе линейных уравнений для нахождения коэффициентов $u_0=(u_{01},u_{02},u_{03})$:

$$\alpha u_0 = A u_0 \quad (20)$$

Для определения разрешимости системы составим характеристическое уравнение

$$\det(A - \alpha E) = 0 \quad (21)$$

где $\boldsymbol{E}$ – единичная матрица размерностью (3x3).

Уравнение (21) является уравнением третьего порядка

$$\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = 0. \quad (21a)$$

Уравнение имеет три решения. Корни могут быть как вещественными, так и комплексными (в частном случае – чисто мнимыми). После определения α_1, α_2, α_3 решение уравнения (17) можно представить в

$$u = u_{01}e^{\alpha_1 t} + u_{02}e^{\alpha_2 t} + u_{03}e^{\alpha_3 t} \quad (22)$$

Данное решение получится в том случае, когда все три корня различны. Появление совпадающих корней α приводит к вырождению решения уравнения (17), то есть вместе со слагаемым вида $u_0e^{\alpha t}$ появляются и слагаемые вида $te^{\alpha t}$. При совпадении всех трех корней может происходить дальнейшее вырождение, тогда решение приобретает вид $u = (u_{01}+tu_{02}+t^2u_{03})e^{\alpha t}$.

Рассмотрим классификацию особых точек для случая, когда все три корня характеристического уравнения различны.

Первый случай. Все корни вещественные. Здесь возможны следующие ситуации:

$$1.\ \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < 0;\quad 2.\ \alpha_1 < \alpha_2 < 0 < \alpha_3;\quad 3.\ \alpha_1 < 0 < \alpha_2 < \alpha_3;\quad 4.\ 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3. \quad (23)$$

Первая и четвертая из этих ситуаций являются прямыми следствиями соответствующих устойчивого и неустойчивого узлов фазового портрета динамической системы на плоскости. Поведение рассматриваемой системы с одной степенью свободы вблизи узла устойчивости аналогично поведению системы с двумя степенями свободы вблизи особой точки. Вместе с тем вторая и третья из ситуаций (23) соответствуют новым типам особых точек. Эти точки можно назвать седло-зел, поскольку они обладают свойствами как узла (по одной паре направлений), так и седла (по другой паре направлений). «Узловая» часть этих особых точек может быть как устойчивой (ситуация 2), так и неустойчивой (ситуация 3).

Второй случай. Один корень действительный (у кубических уравнений всегда, по крайней мере, один корень действительный), а два других – комплексно сопряженные. Пусть для определенности $\mathrm{Im}\,\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = \alpha_3^*$ т.е. $\mathrm{Re}\alpha_2 = \mathrm{Re}\alpha_3 \neq 0$, $\mathrm{Im}\alpha_2 = -\mathrm{Im}\alpha_3 \neq 0$. Тогда возможны ситуации:

$$1.\ \alpha_1 < 0,\ \mathrm{Re}\alpha_2 = \mathrm{Re}\alpha_3 < 0;\quad 2.\ \alpha_1 < 0,\ \mathrm{Re}\alpha_2 = \mathrm{Re}\alpha_3 > 0;$$
$$3.\ \alpha_1 > 0,\ \mathrm{Re}\alpha_2 = \mathrm{Re}\alpha_3 < 0;\quad 4.\ \alpha_1 > 0,\ \mathrm{Re}\alpha_2 = \mathrm{Re}\alpha_3 > 0. \quad (24)$$

Следуя приведенной выше классификации этим особым точкам естественно дать названия узло-фокус 1 – устойчивый, 4 – неустойчивый) и седло-фокус (2 и 3).

Третий случай. Если один вещественный корень (α_1) два других (α_2 и α_3) – чисто мнимые. Это соответствует ситуации, когда в плоскости (x_2,x_3) особая точка представляет собой центр, а устойчивость определяется знаком α_1. Такую точку можно называть устойчивым ($\alpha_1 < 0$) или неустойчивым ($\alpha_1 > 0$) узло-центром.

Классификация особых точек для динамических систем с фазовым пространством более высокой размерности аналогична рассмотренному случаю трехмерного пространства. При этом, однако, введение новых названий для соответствующих особых точек не увеличивает наглядность их представления. Для упрощения восприятия особых точек прибегают к выделению в полном фазовом пространстве Γ подпространств Γ^u и Γ^s, в которые включены неустойчивые (Γ^u) и устойчивые (Γ^s) направления. При этом по смыслу разбиения Γ на Γ^u и Γ^s

$$\dim\Gamma = \dim\Gamma^u + \dim\Gamma^s, \quad (25)$$

где символ dim означает размерность соответствующего (под)пространства. Такое разбиение, разумеется, имеет смысл для пространств любой размерности. Так, например, в ситуации (10) размерности подпространств Γ^u и Γ^sравны: 1) $\dim\Gamma^u = 0$, $\dim\Gamma^s = 3$; 2) $\mathrm{dlm}\Gamma^u = 1$, $\dim\Gamma^s = 2$; 3) $\dim T\Gamma^u = 2$, $\dim\Gamma^s = 1$; 4) $\dim\Gamma^u = 3$, $\dim\Gamma^s = 0$.

В случае фазового пространства произвольной размерности для динамической системы (1) тип особой точки определяется, очевидно, из характеристического уравнения вида (21), в котором матрицы A и E суть соответствующие обобщения матриц, введенных выше для систем с трехмерным фазовым пространством.

В этих условиях уравнение

$$\det(A - \alpha E) = 0 \quad (26)$$

представляет собой уравнение n-й степени относительно характеристического показателя n. Как известно, это уравнение имеет ровно n корней, среди которых могут быть как вещественные, так и комплексные. Последние появляются комплексно сопряженными парами, поскольку все коэффициенты в уравнении (26) – вещественные.

Запишем корни уравнения (26) в виде

$$\alpha_i = Re\alpha_i + iIm\alpha_i. \quad (27)$$

Все корни, расположенные в левой полуплоскости комплексной плоскости α, где Reα < 0, отвечают устойчивым направлениям, так как отклонения от положения равновесия по этим направлениям при t → + ∞ затухают. Аналогично корни, расположенные в правой полуплоскости α, отвечают неустойчивым направлениям. Для качественной характеристики типа собой точки достаточно установить число корней характеристического уравнения, лежащих в левой и правой полуплоскостях комплексной плоскости α.

Для уравнений высоких степеней (n > 2) использовать явные формулы для определения корней часто неудобно, поэтому особую ценность приобретают методы определения числа корней того или иного типа, не основанные на явном решении. Одним из таких методов является критерий, который следует из теоремы Рауса о числе комплексных корней многочлена с вещественными коэффициентами – критерий Рауса-Гурвица. В нем формулируются необходимые и достаточные условия, при которых все корни многочлена с вещественными коэффициентами имеют отрицательные вещественные части. Полученные при исследовании системы (1) качественные обобщения вполне справедливы и, что самое главное, устойчивы, несмотря на абсолютные отсутствие какой-либо количественной информации об эндогенных и экзогенных переменных и структуре динамической системы. Качественное объяснение явлений не является второстепенным по отношению к количественному описанию. Важно, что оно носит основополагающий характер и обычно является значительно более существенным. На практике очень часто для качественной характеристики объекта используют количественные методы изучения его свойств и поведения. Выбор и оценка различных моделей управления фактически привели к постановке классической задачи определения устойчивости.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Киселева Н.Н., Усамова Т.Н. Воспроизводственный потенциал проблемных регионов Северного Кавказа // Terra Economicus. – 2010. – Т. 8. – №1 – 2. – С. 124 – 131.
2. Лал Д. Непреднамеренные последствия. Влияние обеспеченности факторами производства, культуры и политики на долгосрочные экономические результаты. – М.: ПРИСЭН, 2007. – 338 с.
3. Киселева Н.Н., Киселев В.В., Папушоя М.С. Методический инструментарий диагностики ресурсного потенциала аграрной сферы региона // Успехи современного естествознания. – 2009. – №8. – С. 33 – 37.
4. Моделирование социо-эколого-экономической системы региона / Под ред. В.И. Гурмана, Е.В. Рюминой. – М.: Наука, 2003. – 175 с.
5. Попов Р. А. Экономика региона: теория, методология, методика. – М.: Вузовская книга, 2012. – 432 с.
6. Киселева Н.Н., Орлянская А.А., Русинова О.С. Управление социально-экономическим развитием сельских территорий аграрного региона. – Пятигорск: РИА-КМВ, 2011. – 151 с.
7. Шнипер Р. И. Регион: экономические методы управления. – Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1993. – 249 с.